U. DE SANTIAGO DE CHILE
FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMATICA Y C.C.
Asignatura: Cálculo II - Ingeniería
PEP 2 Segundo Semestre 2012

PAUTA

Pregunta 1
Se define $f(x) = x\ln x - x$ y $g(x) = f(1+x) - f(1-x)$.
a) Verifique que $g''(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1-x}$.
b) Halle la serie de Maclaurin de $g''(x)$
c) Determine la serie de Maclaurin para $g(x)$ e indique su intervalo de convergencia
Solución.-
a) $g(x) = (1+x)\ln(1+x) - (1+x) - (1-x)\ln(1-x) + (1-x)$
derivando

$$\begin{aligned} g'(x) &= \ln(1+x) + \ln(1-x) \\ g''(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

b) Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{para} \quad |x| < 1 \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \text{para} \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

Sumando

$$g''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \text{ para } \quad |x| < 1$$

Luego

$$g''(x) = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \text{ para } \quad |x| < 1$$

c) Integrando $g''(x)$ como serie dos veces se tiene

$$g(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+3)} + C_1 x + C_2$$

del apartado (*a*) $g'(0) = 0$ y $g(0) = 0 \implies C_1 = 0 \quad y \quad C_2 = 0$
Por lo tanto

$$g(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+3)}, \text{ para } \quad |x| < 1$$

Para $|x| = 1$ la serie es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$ que es absolutamente convergente comparandola con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

La serie es convergente en $[-1, 1]$.

.**Pregunta 2**

Las ecuaciones paramétricas de la elipse centrada de semiejes a y b son.

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}$$

$a)$ Determine la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto correspondiente a $t = \dfrac{\pi}{4}$

$b)$ Obtenga usando coordenadas paramétricas el área encerrada por la elipse.

Solución.-

Si $t = \dfrac{\pi}{4}$, entonces $P = (\dfrac{\sqrt{2}}{2}a, \dfrac{\sqrt{2}}{2}b)$.

Para calcular la pendiente de la recta tangente se debe calcular $\dfrac{dy}{dx}$.

$\dfrac{dy}{dt} = b\cos t$, $\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t \implies y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}\cot$.

Evaluando en $t = \dfrac{\pi}{4}$, $m = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{b}{a}$.

Por lo tanto $y - \frac{\sqrt{2}}{2}b = -\dfrac{b}{a}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$

La ecuación de la recta es

$$y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$$

$b)$ El área

$$A = 4\int_0^a y\cdot dx = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot dt = 4ab(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4ab(\frac{\pi}{4})$$

Luego $A = ab\pi$

Pregunta 3

Considere la función de tres variables $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

con $x(t) = \cos t$ $y(t) = \sin t$ $z(t) = 4\sqrt{t}$

a) Calcule $\dfrac{dw}{dt}$ como función de t **usando regla de la cadena.**

b) Exprese la función w en términos de la variable t y calcule directamente $\dfrac{dw}{dt}$ en $t = 3$

Solución.-

a) Usando regla de la cadena se tiene :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)(-\sin t)+\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right)(\cos t)+\left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \left(\frac{2\cos t}{1+16t}\right)(-\sin t)+\left(\frac{2\sin t}{1+16t}\right)(\cos t)+\left(\frac{8\sqrt{t}}{1+16t}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\right) = \frac{16}{1+16t}
$$

b) Reemplazando directamente las variables independientes queda:

$$w=\ln(\cos^2 t+\sin^2 t+16t)=\ln(1+16t)$$

derivando :

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{16}{1+16t}$$

evaluando en $t=3$:

$$\frac{\partial w}{\partial t}(3)=\frac{16}{49}$$