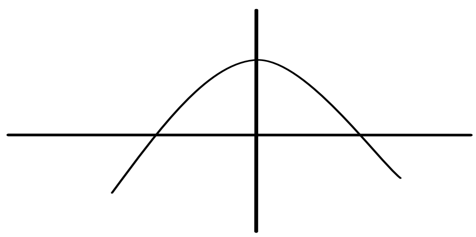
U. DE SANTIAGO DE CHILE
FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMATICA Y C.C.
Asignatura: Cálculo II - Ingeniería
PEP 1 Segundo Semestre 2012

PAUTA

Pregunta 1

Demuestre que el área de la región sombreada de la figura es igual a $\frac{1}{6}$ para todos los valores de z.



Solución.-

Primero hallemos la recta que pasa por los puntos

$$P_1 = (z+1, -z^2-2z) \;\; y \;\; P_2 = (z, 1-z^2)$$

$$y - (1-z^2) = \frac{-z^2-2z-1+z^2}{z+1-z}(x-z)$$

$$y = (-2z-1)x + (z^2+z+1).$$

Así el área es:

$$\begin{aligned}
A &= \int_z^{z+1} \left[1 - x^2 - z^2 + 2zx + x - z - 1\right] dx \\
&= \int_z^{z+1} \left[-x^2 + (2z+1)x - z(z+1)x\right] dx \\
&= \left[\frac{-x^3}{3} + (2z+1)\frac{x^2}{2} - z(z+1)x\right]_z^{z+1} \\
&= (z+1)^2\left[\frac{-(z+1)}{3} + \frac{2z+1}{2} - z\right] - \left[\frac{-z^3}{3} + z^3 + \frac{z^2}{2} - z^3 - z^2\right] \\
&= (z+1)^2\left[\frac{-z}{3} + \frac{1}{6}\right] + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \\
&= \frac{-z^3}{3} - \frac{2z^2}{3} - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{6} + \frac{2z}{6} + \frac{1}{6} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Pregunta 2
Determine una curva que pase por el origen en el plano XY cuya longitud desde $x = 0$ hasta $x = 1$ sea

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^{3x}}{8}}dx$$

Solución.- Sea $y = f(x)$ ecuación de la curva pedida y como

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

debe ocurrir que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{\frac{3}{2}x}}{2\sqrt{2}}$ de lo que se deduce que

$$y = \int \frac{e^{\frac{3}{2}x}}{2\sqrt{2}}dx, \quad \text{tal que } \; y(0) = 0$$

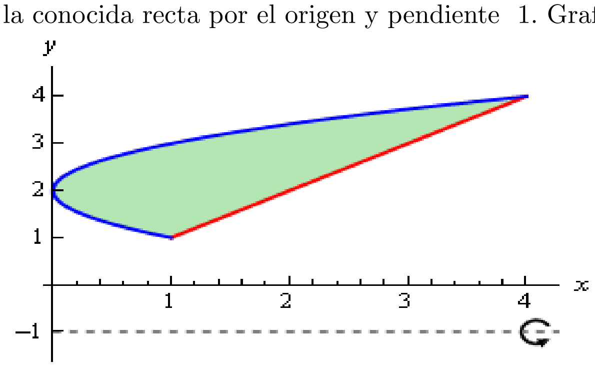
integrando se tiene $y = \dfrac{e^{\frac{3}{2}x}}{3\sqrt{2}} + C$

por la condición $y(0) = 0$ obtenemos $C = -\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.
Luego la curva pedida es

$$y = \frac{e^{\frac{3}{2}x}}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Pregunta 3
Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar la región acotada por la parábola $x = (y-2)^2$ y la recta $x = y$ alrededor de la recta $y = -1$

Solución.- $x = (y-2)^2$ es la ecuación de una parábola simétrica respecto de la recta $y = 2$, se abre hacia la derecha y tiene su vertice en $(0, 2)$, $x = y$ es la conocida recta por el origen y pendiente 1. Graficamente

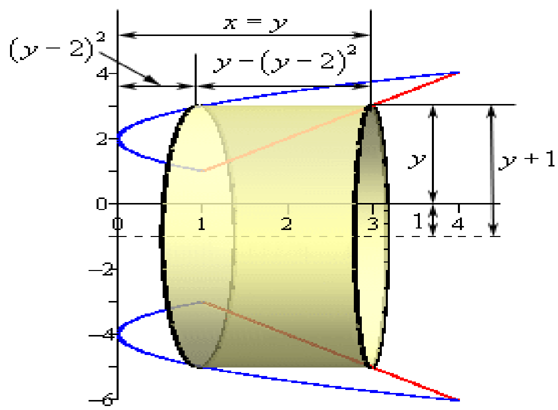


Calcularemos ahora los puntos de intersección.

$$x = (y-2)^2 \quad \text{y} \quad x = y \quad \Longrightarrow (y-2)^2 \ = y \Longrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0$$

resolviendo esta ecuación se tiene $y = 4, y = 1$, los puntos de intersección son $(1,1)$ y $(4,4)$.

Usando el mátodo de los cascarones:



$A(y) = 2\pi(radio)(ancho) \quad \Longrightarrow$

$$A(y) = 2\pi(y+1)(y-(y-2)^2 \ = 2\pi(-y^3 + 4y^2 + y - 4)$$

El volumen del sólido generado es.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^4 (-y^3 + 4y^2 + y - 4)dy \\ &= 2\pi \left[-\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 4y \right]_1^4 \\ &= \frac{63\pi}{2} \end{aligned}$$