U. DE SANTIAGO DE CHILE
FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMATICA Y C.C.
Cálculo II - M.B. Ingeniería (22 Dic. 2012)

PAUTA:EXAMEN

.

Pregunta 1
Evalúe las siguientes integrales

$$a) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(2x)}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}dx$$

Solución.- $+a)$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(2x)}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x\cos x}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{6\sin x\cos x}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}dx \\ &= \frac{4}{3}\left.\sqrt{1+3\sin^2 x}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(2x)}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}dx = \frac{4}{3}\left[\sqrt{4}-1\right] = \frac{4}{3}$$

$b)$

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1}dx &= 2\int_2^3 \frac{\frac{\ln(x-1)}{\ln 2}}{x-1}dx = 2\int_2^3 \frac{1}{x-1}\cdot\frac{\ln(x-1)}{\ln 2}dx \\ &= \left(\frac{2}{\ln 2}\right)\int_2^3 \frac{\ln(x-}{x-1}dx = \left(\frac{2}{\ln 2}\right)\cdot\left.\frac{\ln^2(x-1)}{2}\right|_2^3\end{aligned}$$

$$\int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1}dx = \frac{1}{\ln 2}\left[\ln^2 2 - \ln^2 1\right] = \ln 2$$

Por lo tanto $\quad \int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1}dx = \ln 2$

Determine el el volumen del Sólido generado al hacer girar la región acotada por $y=\sqrt{x}$ y $y=\frac{x^2}{8}$, alrededor del eje y.

Solución.-

$$V = 2\pi \int_0^4 x\sqrt{x}dx - 2\pi \int_0^4 x \cdot \frac{x^2}{8} dx$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx - \frac{\pi}{4} \int_0^4 x^3 dx \\ &= \frac{4}{5}\pi x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 - \frac{\pi}{16} x^4\Big|_0^4 \end{aligned}$$

$$V = \frac{128}{5}\pi - 16\pi = \frac{48}{5}\pi$$

Por lo tanto $V = \frac{48}{5}\pi$

Alternativa:

$$V = \int_0^2 \left[\left(\sqrt{8y}\right)^2 - \left(y^2\right)^2\right] dy$$

Pregunta 3

Analizar completamente la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n}(x-4)^n$$

Solución.- Sea $a_n = \dfrac{n+1}{10^n}(x-4)^n$

$\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{(n+2)(x-1)^{n+1}}{10^{n+2}} \cdot \dfrac{10^n}{(n+1)(x-4)^n}\right| = \dfrac{1}{10}|x-4|$

Por criterio del cuociente esta serie converge si $\dfrac{1}{10}|x-4| < 1$ y diverge si $\dfrac{1}{10}|x-4| > 1$.

Por lo tanto la serie converge si $-6 < x < 14$ y resta analizar comportamiento

en los extremos.

Si $x = -6$, se obtiene la serie alternada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n}(-10)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1)$$

Una condición necesaria es que el límite del termino $n - esimo$, $a_n = n+1$ sea zero cosa que no ocurre, por lo tanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{10^n}(-10)^n$ diverge.

Si $x = 14$, se obtiene la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$

La $n-esima$ suma parcial es $S_n = 1+2+3+4+5+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

y $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2} = \infty$, por lo tanto la serie también deverge en $x = 14$.

Concluimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n}(x-4)^n$ converge en $]-6, 14[$ y diverge fuera de este intervalo.